場の理論からのモノドロミー関数の導出

村田実貴生（指導教官　薩摩順吉）

（目的）『ホロノミック量子場』（神保道夫著，岩波書店）中の，格子の理論からスケール極限によって場の理論へ移行し，モノドロミーをもつ関数を導出した手順をまとめる．
（内容）格子模型からスケール極限をとる．つまり座標

$$x^1 = n^1\epsilon, \quad x^2 = n^2\epsilon, \qquad (n^1, n^2) \in \mathbf{Z}^2$$

で表される点を格子点として，$\epsilon \to 0$ の極限をとる．結果が自明にならないように温度パラメータについても適当な極限をとると，相関関数の連続極限が得られる．そのことからもとの演算子自身が極限をもつと考えられる．フェルミオン，スピン演算子の極限をそれぞれ $\psi(x), \sigma(x)$ とする．(但し，$\psi(x) = {}^t\left(\psi_+(x), \psi_-(x)\right)$ である．)

さて，これら演算子の相関関数を考えるが，例えば $\psi(x)$ の相関関数 $\langle\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\rangle$ は Wick の定理により 2 点関数 $\langle\psi(x_1)\psi(x_2)\rangle$ から完全に決まってしまう．そこで 2 点関数

$$w(x) = \langle\psi(x)\psi(0)\rangle$$

のモノドロミーを考察する．(一方の座標を固定しても並進共変性から一般性を失わないことに注意する．) 実はこの関数は $x^2 > 0$ へ解析接続できる．同様に

$$w'(x) = \langle\psi(0)\psi(x)\rangle$$

は $x^2 < 0$ へ解析接続できる．一方，$x^2 = 0$ において期待値を考えれば，反交換関係から

$$w(x) = -w'(x) \qquad (x^1 \neq 0,\, x^2 = 0)$$

が得られる．よって両者は互いに他の半平面における解析接続を与えており，結局 2 点関数は $(x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2_{Euc}\backslash\{0\}$ で実解析的になる．ゆえにモノドロミーは生じないことがわかる．

したがって，モノドロミーが生じるような関数を導出するためには $\psi(x), \sigma(x)$ の混在した期待値を考察する必要がある．最も簡単なのは次の場合である：

$$\langle\psi_\pm(x)\sigma(0)\rangle = \int_0^\infty \underline{du}\sqrt{iu}^{\pm 1} e^{-im(x^- u + x^+ u^{-1})} \qquad \left(\underline{du} = \frac{du}{2\pi|u|}\right).$$

この積分は $\mathrm{Im}\, x^\pm < 0$ で収束して解析的である．いま

$$z = -x^- = \frac{x^1 + ix^2}{2} = \frac{1}{2}re^{i\theta}, \quad \bar{z} = x^+ = \frac{x^1 - ix^2}{2} = \frac{1}{2}re^{-i\theta}$$

とおいて上式の $\mathbf{R}^2_{Euc}$ への解析接続を $w_\pm(z)$ とすると，その結果として次の式が得られる．

$$w_+(z) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{-mr}}{\sqrt{mz}}, \quad w_-(z) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{-mr}}{\sqrt{m\bar{z}}}.$$

これらの式の特徴は $\sqrt{z}, \sqrt{\bar{z}}$ が含まれていることである．つまり $w_\pm(z)$ は $z = 0$ において分岐する二価関数になっている．ゆえにモノドロミー（多価性）が生じていることがわかる．

このようにして，場の理論からモノドロミーをもつ関数を導出できる．