物理数学 I および演習　演習問題解答　　2015/5/21（木）課題配布

＜課題＞

1.　曲線 $\boldsymbol{r}(t) = e^t\,\boldsymbol{i} + \sqrt{2}t\,\boldsymbol{j} + e^{-t}\,\boldsymbol{k}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ を求めよ．　　（2 点）

(2)　弧長 s を t の関数として表せ．ただし，$t = 0$ のとき $s = 0$ とする．　　（2 点）

（点 $\boldsymbol{r}(0)$ から $\boldsymbol{r}(t)$ までの曲線に沿った長さ s を求めよ．）

(3)　単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ を求めよ．　　（2 点）

＜解答＞

1. (1)

接線ベクトル $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = e^t\,\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\,\boldsymbol{j} - e^{-t}\,\boldsymbol{k}$$

1. (2)

接線ベクトルの大きさは

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| &= \sqrt{\left(e^t\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-e^{-t}\right)^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} \\ &= \sqrt{\left(e^t + e^{-t}\right)^2} \\ &= e^t + e^{-t} \quad \left(\because\ e^t + e^{-t} > 0\right)\end{aligned}$$

である．求める弧長 s は点 $\boldsymbol{r}(0)$ から $\boldsymbol{r}(t)$ までの曲線に沿った長さを表すので,

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt \\ &= \int_0^t \left(e^t + e^{-t}\right) dt \\ &= \left[e^t - e^{-t}\right]_0^t \\ &= e^t - e^{-t}\end{aligned}$$

1. (3)

単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ は次のように示すことができる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| \\ &= \frac{1}{e^t + e^{-t}}\left(e^t\,\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\,\boldsymbol{j} - e^{-t}\,\boldsymbol{k}\right)\end{aligned}$$